



Forblad

Beregning af Krydsarmerede Jernbetonpladers Brudmoment

K.W. Johansen

Tidsskrifter

BSM 3-1 Bygningsstatiske Meddelelser

1931

BEREGNING AF KRYDSARMERED JÆRNBETONPLADERS BRUDMOMENT

Af K. W. JOHANSEN.

Som bekendt har Ingeniør *Aage Ingerslev* i 1921¹⁾ angivet en elementær Beregningsmetode for krydsarmerede Plader, idet han gik ud fra, at Pladen brydes langs visse Brudlinier, hvor Momentet altsaa maa være Maksimum, Transversalkraften følgelig Nul. Forudsættes dernæst Maksimummomentet konstant langs Brudlinierne, kunde dette Moment bestemmes ved Hjælp af Ligevægtsligningerne. Disse Forudsætninger har en saa almindelig Karakter, at Plader af enhver Form og med enhver Understøtningsart skulde kunne beregnes paa denne Maade. Prøver man imidlertid at beregne f. Eks. en rektangulær Plade, der er understøttet langs to modstaaende Sider og fri langs de to andre og belastet med en Enkeltkraft, viser det sig straks, at der nødvendigvis maa være Transversalkræfter i Brudsnittene. En nærmere Undersøgelse, som jeg ikke skal komme ind paa her, viser nu ogsaa, at for Jærnbetonplader paa Brudstadiet er Transversalkraften ikke Nul langs Brudlinierne, og det følgende vil vise, at man trods Transversalkraften og det vridende Moment i Brudlinierne netop faar Ligninger nok til Bestemmelse af Brudmomentet, og at Plader af enhver Form og med enhver Understøtningsart kan beregnes paa denne Maade.

Der anvendes følgende Signaturer:

<p>~~~~~ Brudlinie.</p> <p>- · - · - Drejningsakse.</p> <p>———— Fri Rand.</p> <p> Simpelt understøttet Rand.</p> <p>xxxxxxxx Indspændt Rand.</p>	<p>==== Mellemanderstøtning.</p> <p>■ ■ Søjler uden og med Indspænding.</p> <p>~*~ Transversalkræfter.</p> <p>⊙ ⊗ Enkeltkraft opad og nedad.</p> <p>———— Liniebelastning.</p>
---	---

¹⁾ »Ingeniøren« 1921, S. 507.

Brudlinierne.

I Brudtilstanden flyder Jærnet i Brudlinierne, saa der her er plastiske Formforandringer, medens de Pladedele, hvori Brudlinierne deler Pladen, kun har elastiske Formforandringer, og da disse kan regnes forsvindende i Forhold til de plastiske, kan de enkelte Pladedele med god Tilnærmelse regnes for plane, og deres Skæringslinier, Brudlinierne, for rette.

Formforandringerne regnes altsaa kun at optræde i Brudlinierne og bestaar i en Drejning af de to tilstødende Pladedele i Forhold til hinanden. Denne relative Drejning regnes med samme Fortegn som det tilsvarende Moment, altsaa positiv, naar Pladen trykkes foroven og strækkes for neden. Pladedelene udfører Drejninger om visse Akser, hvis Beliggenhed afhænger af Understøtningerne. Da Pladedelene er plane, ser man, at

- (I) Brudlinien mellem to Pladedele maa gaa gennem deres Drejningsaksers Skæringspunkt.

For en Pladedel, der er simpelt understøttet langs Kanten, maa Drejningsaksen ligge i Kanten og for en Del, der er understøttet paa en Søjle,

maa Aksen gaa gennem Søjlen, men kan ellers ligge vilkaarligt. Ved Hjælp heraf og af ovenstaaende Sætning kan man danne sig et Begreb om Brudfigurens Udseende (Fig. 1 og 2)¹⁾. Er Pladedelenes Drejninger θ givne, kan Brudfiguren konstrueres. Man tænker sig da den deformerede Plade skaaret med en Plan i Af-

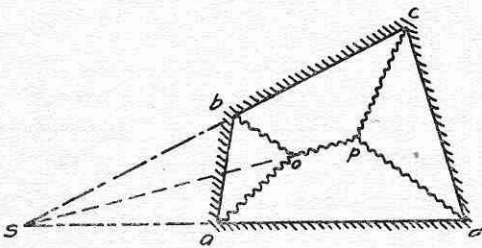


Fig. 1.

standen s under Understøtningernes Plan. Denne Plans Skæringslinier med de drejede Pladedele er Niveaulinier paa det Polyeder, der dannes af den deformerede Plade. Niveaulinierne ligger i Afstanden $s:\theta$ fra Drejningsakserne og skærer hinanden paa Brudlinierne, der saaledes er bestemte ved Drejningsaksernes Skæringspunkt og de tilsvarende Niveauliniers Skæringspunkt (Fig. 3).

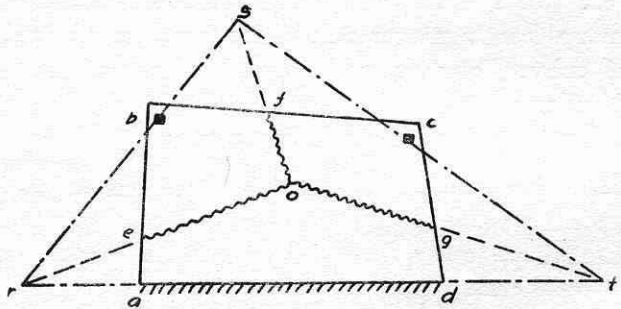


Fig. 2.

¹⁾ Brudfiguren i Fig. 1 skyldes Ingerslev.

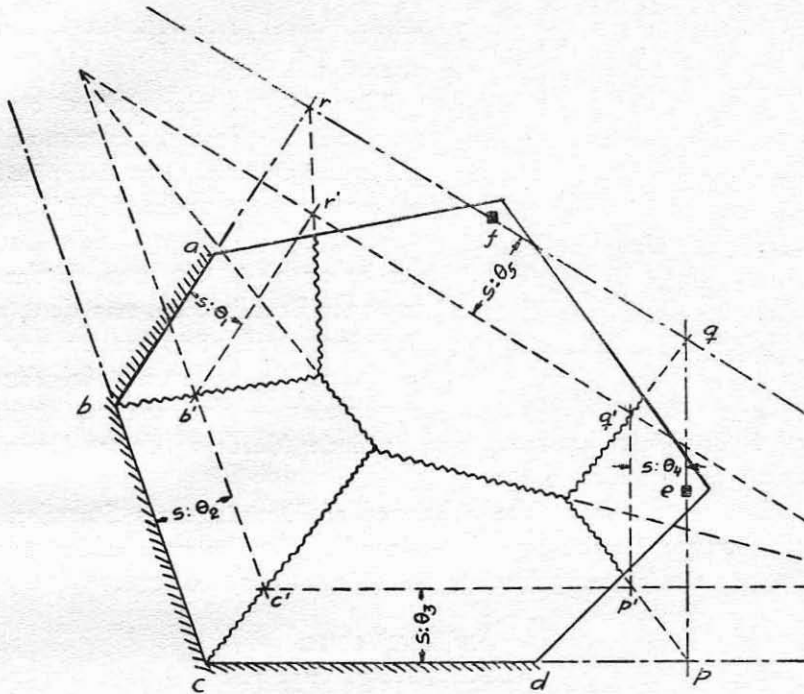


Fig. 3.

Da Resultatet maa være uafhængigt af s , kan s sættes proportional med en af Drejningsvinklerne, og man ser herved, at

(II) Brudfiguren er bestemt ved Pladedelernes Drejningsakser og Forholdene mellem Drejningsvinklerne.

Er Pladen delt i n Dele, og er alle Drejningsakserne kendte, afhænger Brudfiguren kun af de $n-1$ Forhold mellem Drejningsvinklerne.

Naar en Brudlinie (aob i Fig. 4) har et Knæk, maa der støde en anden Brudlinie (oc) til, og dennes Retning og Drejning bestemmes som geometrisk Differentens mellem Drejningerne i ao og ob .

Eftersom Brudlinien støder til paa den konvekse eller konkave Side af Knækket, faar dens Drejning samme eller modsat For tegn som Drejningerne i aob . Brudlinier og deres Drej

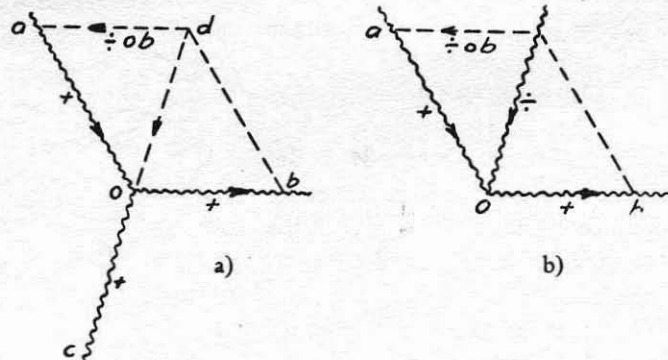


Fig. 4.

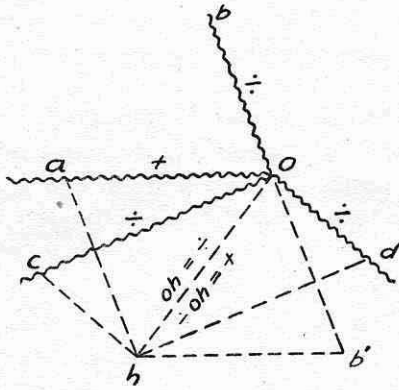


Fig. 5.

Ved 5 Brudlinier kan man paa lignende Maade af de tre Drejninger bestemme de to andre, o. s. v.

Da Brudmomenterne ikke afhænger af Drejningernes Størrelse, faar kun Fortegnene Betydning i det følgende. Brudlinierne kaldes positive eller negative efter deres Drejningers (Momenters) Fortegn.

Snitkræfterne.

A. Ensarmerede Plader.

I ensarmerede Plader, d. v. s. Plader med samme Armering i to paa hinanden vinkelrette Retninger, er Brudmomentet m pr. Længdeenhed ens i alle Retninger. Det bøjende Moment i Brudlinien su af Længden a (Fig. 6) er ma og fremstilles ved selve Brudlinien som Vektor. Betragtes Pladestykket B , gaar Vektoren i Retning fra s til u , idet den positive Omløbsretning er mod Uret. Desuden virker der i su et vridende Moment og en Transversalkraft. Disse kan entydigt angives ved Transversalkræfterne Q_a og Q'_a i s og u . Fremstilles Snitkræfterne paa tilsvarende Maade i sr og st , ses det, at i s virker der paa Pladedelen A Transversalkraften $Q_A = Q_b - Q_c$ (positiv opad), paa B $Q_B = Q_c - Q_a$ og paa C $Q_C = Q_a - Q_b$, hvoraf straks faas

$$Q_A + Q_B + Q_C = 0. \quad (1)$$

Disse Kræfter betegnes i det følgende som Knudekræfterne, og deres Sum er altid Nul, ogsaa naar der er flere Brudlinier til Knudepunktet.

Da m er en Maksimalværdi, vil der i Snit, som ligger tæt ved Brudlinien, være samme Værdi

ninger »sammensættes« og »opløses« efter Fig. 4.

Naar 4 Brudlinier mødes, og Retningerne er bekendte, kan man af Drejningerne i de to af dem bestemme Drejningerne i de to andre. Man »sammensætter« (Fig. 5) de to kendte Drejninger ao og ob til oh ; men da der ikke er nogen Brudlinie oh , maa de to andre Drejninger ved »Sammensætning« give — oh , og de bestemmes følgelig ved at »opløse« — oh efter deres Retninger.

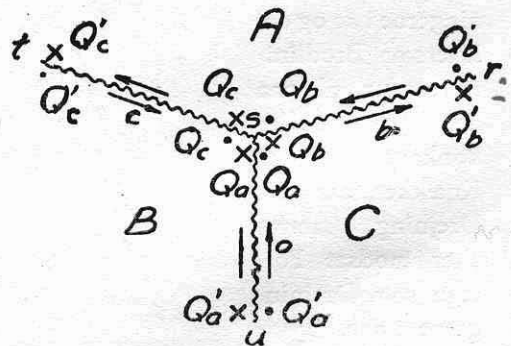


Fig. 6.

af det bøjende Moment. Dette er tilstrækkeligt til Bestemmelse af Knudekræfterne. Betragtes et Knudepunkt med tre positive Brudlinier (Fig. 7), udskæres ved Brudlinierne og de nærliggende Snit a' og b' Trekanterne tss' og rss' , der skal være i Ligevægt hver for sig under Paavirkning af de ydre og indre Kræfter. Da der i a' og b' er samme m som i a, b og $ss' = ds$, er de bøjende Momenter i Ligevægt. I ss' virker desuden et vridende Moment dV og Transversalkraften dQ . Moment om b' for $\triangle tss'$ giver, idet Bidsragene fra Belastningen og dQ er uendelig smaa af højere Orden,

$$Q_b \cdot ds \cdot \sin \alpha = dV \cdot \sin \alpha^1);$$

$$Q_b = \frac{dV}{ds}.$$

Paa samme Maade faas ved $\triangle rss'$ $Q_a = \frac{dV}{ds}$; følgelig bliver $Q_c = Q_a - Q_b = 0$ og tilsvarende $Q_A = Q_B = 0$. Man faar almindeligt:

(III) I et Knudepunkt, hvor Brudlinierne alle har samme Fortegn, er alle Knudekræfterne Nul.

Betragtes dernæst et Knudepunkt med to positive og en negativ Brudlinie, (Fig. 8), giver Momentet om a' for $\triangle rss'$,

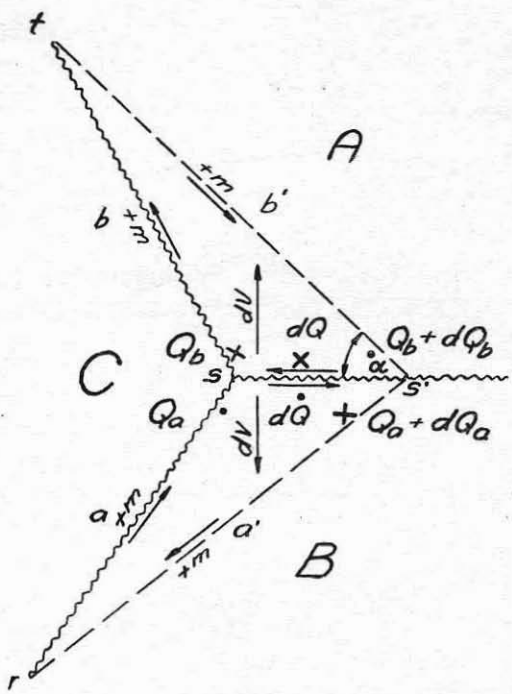


Fig. 7.

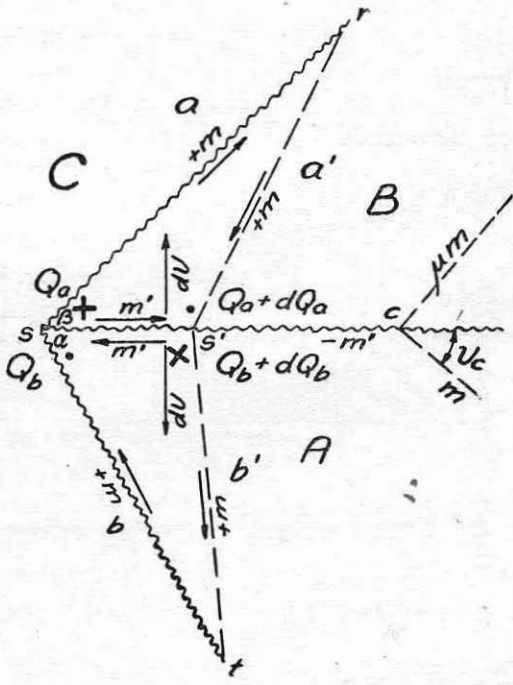


Fig. 8.

1) Her og i det følgende skulde strengt taget staa $\alpha + d\alpha$, men dette er saavel her som i det følgende uden Betydning.

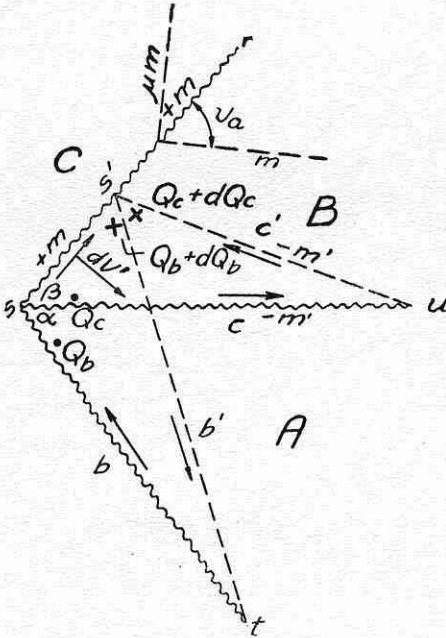


Fig. 9.

og Moment om c' for $\triangle uss'$ giver

$$Q_c = \frac{dV'}{ds} + (m + m') \cot \beta,$$

hvoraf

$$Q_A = Q_b - Q_c = -(m + m') \cot \beta \quad (2)$$

og tilsvarende

$$Q_B = -(m + m') \cot \alpha. \quad (2)$$

Resultaterne er angivet i Fig. 10.

Støder der endnu en Brudlinie til Fig. 11, faas ved at forskyde s til højre $Q_a - Q_b = (m + m') (\cot \alpha + \cot \beta)$, men ved Forskydning til venstre

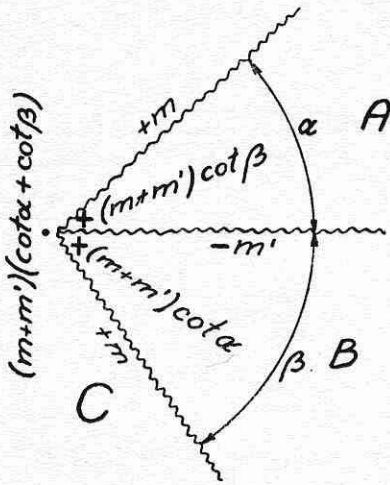


Fig. 10.

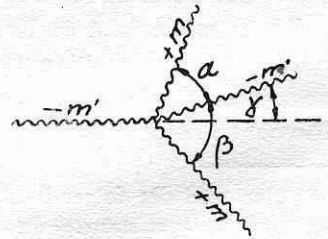


Fig. 11.

idet Resultanten af de bøjende Momenter i a og a' er $m \cdot ss'$ i samme Retning som det bøjende Moment $m' \cdot ss'$ i ss' ,

$$Q_a \cdot ds \cdot \sin \beta = dV \cdot \sin \beta + (m + m') \cdot ds \cdot \cos \beta$$

$$Q_a = \frac{dV}{ds} + (m + m') \cot \beta.$$

Paa samme Maade faas ved $\triangle tss'$

$$Q_b = \frac{dV}{ds} - (m + m') \cot \alpha.$$

Af disse faas dernæst

$$Q_c = Q_a - Q_b = (m + m') (\cot \alpha + \cot \beta). \quad (2)$$

Forskydes s ud ad a , faas (Fig 9) ved Moment om b' for $\triangle tss'$

$$Q_b = \frac{dV'}{ds},$$

$$Q_a - Q_b = (m + m') (\cot(\alpha + \gamma) + \cot(\beta - \gamma)).$$

Disse Ligninger giver kun samme Værdi, naar $\gamma = n\pi$, d. v. s. de to negative Brudlinier skal have samme Retning.

(IV) I et Knudepunkt, hvor Brudlinierne ikke alle har samme Fortegn, kan der kun være tre forskellige Retninger af Brudlinierne.

Ved en fri eller simpelt understøttet Rand lægges Snittet a' (Fig. 12), og Moment om dette for $\triangle ssr'$ giver

$$\begin{aligned} Q_R \cdot ds \cdot \sin \alpha &= m \cdot ds \cdot \cos \alpha, \\ Q_R &= m \cot \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

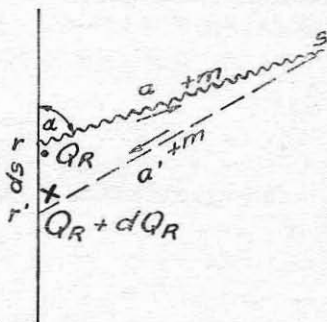


Fig. 12.

B. Uensarmedede Plader.

Disse er armerede i to paa hinanden vinkelrette Retninger i Forholdet $1 : \mu$. Brudmomenterne i de tilsvarende Snitretninger er m og μm . En Brudlinie ab (Fig. 13)¹⁾ i vilkaarlig Retning kan tænkes fint zig-zag-

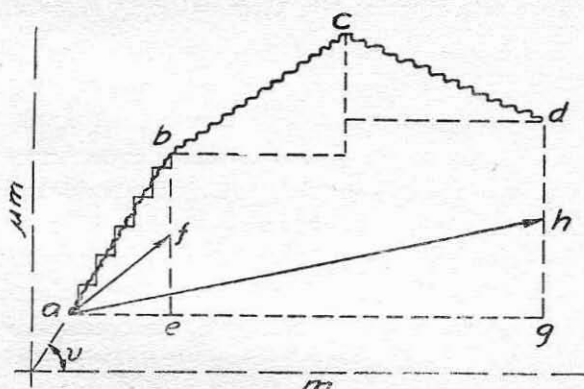


Fig. 13.

formet i Snitretningerne svarende til Momenterne m og μm . De første giver en Resultant $m \cdot ae$, de sidste $\mu m \cdot eb$, og afsættes $ef = \mu \cdot eb$, bliver $m \cdot af$ Brudmomentet for ab .

Det ses, at en Del af det vridende Moment i ab udgøres af Brudmomentet. Den resterende Del og Transversalkraften bestemmer som før de to

Transversalkræfter i Brudliniens Endepunkter. Det bøjende Moment i ab bliver

$$m \cdot ae \cdot \cos v + \mu m \cdot eb \cdot \sin v = m \cdot ab \cdot \cos^2 v + \mu m \cdot ab \cdot \sin^2 v,$$

altsaa pr. Længdeenhed

$$m_v = m \cdot \cos^2 v + \mu m \cdot \sin^2 v. \quad (3)$$

For Brudlinien $abcd$, hvis Momenter alle har samme Fortegn, bliver Resultanten af Brudmomenterne $m \cdot ah$, sammensat af $m \cdot ag$ og $\mu m \cdot gd = m \cdot gh$.

¹⁾ I Figurene er angivet de Brudlinieretninger, der har Momenterne m og μm .

²⁾ Udtrykket viser, at m_v kan bestemmes af m og μm ved Land's eller Mohr's Cirkel.

I en lukket Brudlinie med Momenter af samme Fortegn er Brudmomenternes Resultant Nul. Heraf følger straks, at Sætning (III) ogsaa gælder for uensarmerede Plader.

Ved fri eller simpelt understøttet Rand faas (Fig. 14)

$$Q_R \cdot ds \cdot \sin \alpha = m \cdot ds \cdot \cos v_R \cdot \cos (v_R - \alpha) + m \cdot ds \cdot \sin v_R \cdot \sin (v_R - \alpha)$$

eller

$$Q_R = (m \cdot \cos^2 v_R + \mu m \cdot \sin^2 v_R) \cot \alpha + (1 - \mu) m \cdot \sin v_R \cdot \cos v_R. \quad (2a)$$

Paa lignende Maade faas

$$\left. \begin{aligned} Q_A &= -[(m + m') \cos^2 v_a + (\mu m + \mu' m') \sin^2 v_a] \cot \beta \\ &\quad - [(1 - \mu) m + (1 - \mu') m'] \cos v_a \sin v_a, \\ Q_B &= -[(m + m') \cos^2 v_b + (\mu m + \mu' m') \sin^2 v_b] \cot \alpha \\ &\quad + [(1 - \mu) m + (1 - \mu') m'] \cos v_b \sin v_b, \\ Q_C &= [(m + m') \cos^2 v_c + (\mu m + \mu' m') \sin^2 v_c] (\cot \alpha + \cot \beta). \end{aligned} \right\} (2a)$$

Som Kontrol havest $\Sigma Q = 0$, idet $\alpha = v_c - v_b$ og $\beta = v_a - v_c$.

For en Plade med nedre Armering i kun een Retning og lige saa stor øvre Armering i en Retning vinkelret derpaa er $\mu = 0$, $m' = 0$ og $\mu' m' = m$, hvoraf faas

$$\left. \begin{aligned} Q_A &= -m \cot \beta; \quad Q_B = -m \cot \alpha; \quad Q_C = m (\cot \alpha + \cot \beta); \\ Q_R &= m \cdot \cos v_R (\cos v_R \cdot \cot \alpha + \sin v_R). \end{aligned} \right\} (2b)$$

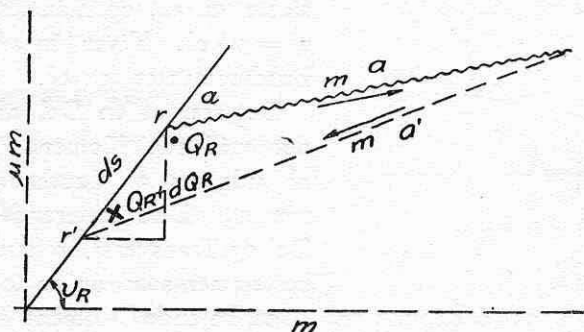


Fig. 14.

Plader med denne Armering betegnes tværarmerede.

Da der i Virkeligheden ikke forekommer Enkeltkraft og Liniebelastninger, men kun Belastninger koncentrerede omkring Punkter og Linier, er det ikke nødvendigt at anstille særlige Undersøgelser i disse Tilfælde, da

en koncentreret Belastning ikke indvirker paa Gyldigheden af ovenstaaende Formler. Det samme gælder Understøtninger paa Søjler og Bjælker (Mure). I det følgende benyttes dog stadig de teoretiske Udtryk Enkeltkraft, Liniebelastning, Understøtning i Punkt og Linie, men der regnes med de tilsvarende koncentrerede Belastninger og Reaktionen.

Ligevægtsligningerne. Arbejdsligningen.

Under Paavirkning af Belastningen, Brudmomenterne og Knudekræfterne skal de enkelte Pladedele være i Ligevægt, og dette giver for hver Pladedel tre Ligevægtsligninger, f. Eks. to Momentligninger om Akser i Pladens Plan og en Projektionsligning paa Pladens Normal. Er Pladen delt i n Dele, faas $3n$ Ligninger til Bestemmelse af de ubekendte Størrelser. Disse er Brudmomentet m , Reaktionerne, Drejningsakserne og de $n-1$ Forhold mellem Drejningerne, der bestemmer Brudfiguren. Drejningsforholdene udgør sammen med Brudmomentet n ubekendte. For en Pladedel, der er understøttet langs en Kant, ligger Drejningsaksen i denne, er altsaa bekendt, medens Reaktionens Størrelse og Angrebepunkt i Kanten er ubekendte. Ved en Pladedel, som er understøttet paa en Søjle, skal Drejningsaksen gaa gennem denne, men dens Retning er ukendt; Reaktionen skal ligge i Søjlen, saa kun dens Størrelse er ukendt. Ved en ikke understøttet Pladedel er der ingen Reaktion, men Drejningsaksens Beliggenhed er ganske ukendt, d. v. s. der er her som i de foregaaende Tilfælde to ubekendte. For alle n Pladedele bliver der $n + 2n = 3n$ ubekendte, stemmende med Antallet af Ligninger.

Undertiden kan det være bekvemt at anvende Arbejdsligningen. Idet de elastiske Formforandringer ikke medregnes, bliver Bidraget fra de indre Kræfter kun Brudmomenternes Arbejde, der er proportionalt med Drejningerne i Brudlinierne. Drejningen i en Brudlinie sammensættes af de tilstødende Pladedeles Drejninger om deres Drejningsakser, saa Bidraget fra hver Pladedel bliver Produktet af dens Drejning og Brudmomentets Projektion paa Drejningsaksen. Samtlige Bidrag fra en Pladedel bliver følgelig Produktet af Pladedelens Drejning θ og Projektionen af dens Brudmomenters Resultant M paa Drejningsaksen, altsaa $\theta \cdot M \cdot \cos(\theta, M)$. Er y de til Drejningerne θ svarende Bevægelser af de ydre Kræfters Angrebepunkter, faas ved Summation over hele Pladen Arbejdsligningen

$$\sum Py = \sum \theta \cdot M \cos(\theta, M). \quad (4)$$

Denne udtrykker Brudmomentets Afhængighed af Brudfiguren.

Brudmomentet er i det foregaaende opfattet som en Maksimalværdi i Forhold til Momenterne i Snit nær Brudlinierne. Lægges disse Snit saadan, at der dannes en ny Snitfigur, der opfylder de geometriske Betingelser, ses det, at en lille Ændring af Snitfiguren giver samme m , altsaa Tilvæksten $dm = 0$. Følgelig kan m opfattes som Maksimalværdien for samtlige mulige Snitfigurer, og Brudfiguren som den Snitfigur, der gør m til Maksimum. Ved Arbejdsligningen (4) kan derved saavel Brudmomentet som Brudfiguren bestemmes.

Ved mange Opgaver er flere Former af Brudfigurer mulige, men den Figur, der giver det største Brudmoment, vil opstaa først under en jævnt voksende Belastning, d. v. s. Brudfiguren svarer til det absolutte Maksimum af m .

Hjørner.

I et Hjørne, der dannes af to simpelt understøttede Rande, maa Brudlinien mellem Pladedelene A og B løbe ud i Hjørnepunktet h , der er Drejningsaksernes Skæringspunkt (Fig. 15 a). Knudekræfterne, der for ensarmerede Plader bliver $Q_R = m \cot \alpha$ og $Q_{R'} = m \cot \beta$, viser, at der i Hjørnet virker en Kraft $Q_R + Q_{R'}$ nedad paa Pladen¹⁾, d. v. s. Hjørnet maa være forankret i Understøtningen. Er dette ikke Tilfældet, vil Pladen lette sig fra Understøtningen i Hjørnet, idet C vipper om Aksen ab (Fig. 15 b), og Brudlinien spalter sig. Forankres »Vipperen« C i Understøtningen, dannes der en negativ Brudlinie ab (Fig. 15 c). Ved en vis øvre

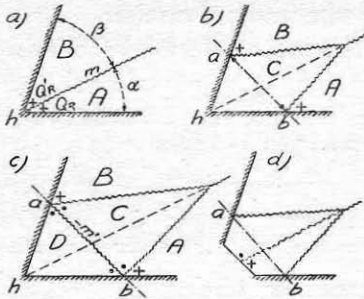


Fig. 15.

Armering i Hjørnet falder a og b i h , saa det oprindelige Brudbillede (Fig. 15 a) fremkommer. Dette forudsætter altsaa foruden Forankring ogsaa en vis øvre Armering i Hjørnet. Tænkte man sig Hjørnet afskaaret ved et lille Stykke fri Rand, vilde Knudekræfterne faa Summen Nul, saa Forankring ikke blev nødvendig; men der vilde alligevel dannes en Vipper, idet denne Brudfigur giver det største Brudmoment. Heraf ser man, at Vippernes Forekomst ikke saa meget er et Forankringspørgsmaal som et Formspørgsmaal.

Bestemmelsen af disse Vippere er meget vanskelig, men kan dog gennemføres for ensarmerede Plader med Enkeltkraftbelastning. Ved jævnt fordelt Belastning spiller Vipperne en mindre Rolle, saa man her kan nøjes med en tilnærmet Bestemmelse. Ved disse Beregninger er det bekvemt at benytte følgende:

Ved en ensarmeret Pladedel A , begrænset af den positive Brudlinie $abcde$, hvortil der kun støder positive Brudlinier, og som begynder og ender ved en fri eller simpelt understøttet Rand, bliver

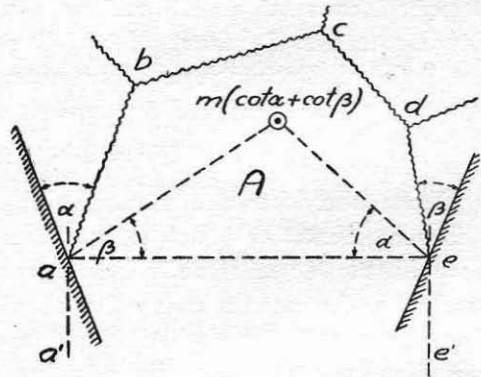


Fig. 16.

¹⁾ Dette strider tilsyneladende mod (1); men ved Uledelsen af (1) og (2) blev det forudsat, at der ikke virkede Enkeltkræfter i Brudlinierne, hvad der netop er Tilfældet ovenfor. Brudfiguren i Fig. 15 a maa derfor betragtes som et teoretisk Grænsetilfælde, der ikke kan opnaas i Virkeligheden.

Resultanten af de bøjende Momenter og Knudekræfterne en Enkeltkraft $m(\cot\alpha + \cot\beta)$ virkende som vist paa Fig. 16.

Med indspændte Rande og en negativ Brudlinie ae bliver Resultanten $(m + m')(\cot\alpha + \cot\beta)$ virkende som vist paa Fig. 17. Angrebepunktet konstrueres altsaa i begge Tilfælde ved at afsætte Randvinklerne α og β ud fra Kor-

den ae . Rigtigheden heraf ses ved at tage Momentet om Akserne ae , aa' og ee' , idet det erindres, at der kun er Knudekræfter i a og e , henholdsvis af Størrelserne $m \cot\alpha$ og $m \cot\beta$ i Fig. 16 og $(m + m') \cot\alpha$ og $(m + m') \cot\beta$ i Fig. 17.

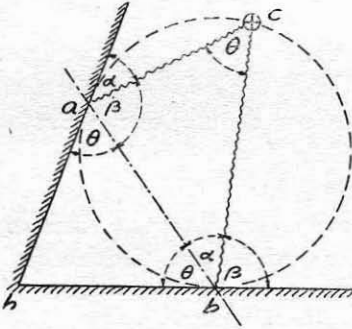


Fig. 18.

Naar Vipperen $ahbc$ er forankret, opstaar den negative Brudlinie ab med Brudmomentet m' svarende til den øvre Armering. Resultanten af Snitkræfterne paa Vipperen abc er fra den negative Brudlinie $m'(\cot\alpha' + \cot\beta')$ virkende nedad i g og fra den positive Brudlinie ac $m(\cot\alpha + \cot\beta)$ virkende opad i d . Af Fig. 19 ses, at abc ligger paa en Cirkel, der i a og b tangerer ah og bg , medens abf ligger paa en Cirkel, der i a og b tangerer ag og bh .

Resultanten af Kræfterne i g og d skal være lig og modsat rettet Enkeltkraften i c , d. v. s. g , d og c skal ligge paa en ret Linie. Dette er

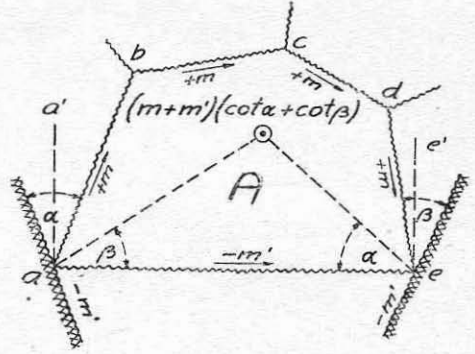


Fig. 17.

I Fig. 18 er vist en uforankret, ensarmeret Vipper $ahbc$ belastet med en Enkeltkraft i c . Da Vipperen ikke hviler paa Understøtningerne, maa Snitkræfternes Resultant være lig og modsat rettet Enkeltkraften i c . Ifølge det foregaaende skal Vinklerne ved ab da være lig Randvinklerne α og β . Man finder da $\angle hab = \angle hba = \angle acb = \theta = \pi - \alpha - \beta$, d. v. s. a og b ligger paa en Cirkel, der tangerer Kanterne og gaar gennem c . Derved kan Vipperen bestemmes, naar c er givet.

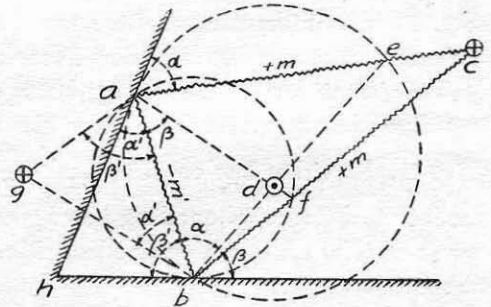


Fig. 19.

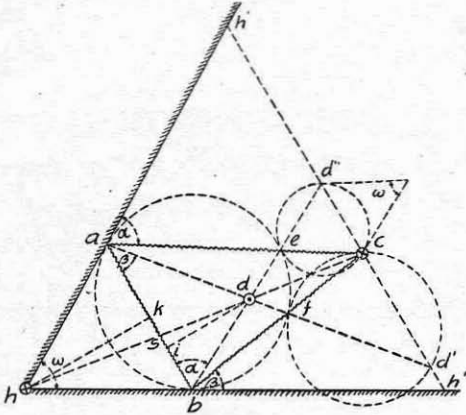


Fig. 20.

$m' \cdot ch : hs = m \cdot cd : ds$ eller

$$\frac{m'}{m} = \frac{cd}{sd} : \frac{ch}{sh} = \text{Dobbeltforholdet (hdsc)}.$$

Trækkes gennem c $h'h'' \perp$ Vinkelhalveringslinien, bliver $h'h'' \neq ab$. Projiceres h, s, d og c fra a ind paa $h'h''$, afbildes h i h' , d i d' og c i c' , medens s' falder i det uendelige. Som bekendt har de projicerede Punkter samme Dobbeltforhold, altsaa $m' : m = (h'd's'c) = cd' : ch'$. Punktet d' findes følgelig ved at afsætte $cd' = ch' \cdot m' : m$. Da $\triangle abf \sim \triangle cd'f$ og er ligedan beliggende m. H. t. f , vil Cirklen om $\triangle cd'f$ tangere Cirklen om $\triangle abf$ i f . Da Buen $d'fc$ rummer Vinklen ved h' , kan Cirklen $cd'f$ konstrueres. Den søgte Cirkel $abfe$ er da bestemt ved Randene og denne Cirkel. Afsættes $cd'' = ch'' \cdot m' : m$, faas tilsvarende Cirklen ced'' , som tangerer den søgte i e .

Med Indspænding ved begge Rande faas samme Konstruktion som i Fig. 18, da Snitkræfternes Resultant har samme Beliggenhed som ved simpelt understøttede Rande uden Forankring.

Ved jævnt fordelt Belastning betragtes kun den symmetriske Vipper abc i Fig. 21. I h virker $2 m' \cot \alpha' = 2 m' \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ nedad, i d $2 m \cot \alpha$ opad og i Tyngdepunktet t for abc $\frac{1}{2} p \cdot ab \cdot cs$ nedad. Moment om t giver

$$2 m' \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot ht = 2 m \cot \alpha \cdot td,$$

da $td = \frac{1}{2} cs - sd = as (\frac{1}{2} \cot (\alpha - \frac{1}{2} \omega) - \operatorname{tg} \alpha)$,
og $ht = hs + \frac{1}{2} cs =$

$$as (\cot \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{2} \cot (\alpha - \frac{1}{2} \omega)), \text{ faas}$$

$$m' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega (\cot \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{2} \cot (\alpha - \frac{1}{2} \omega)) = m \cot \alpha (\frac{1}{2} \cot (\alpha - \frac{1}{2} \omega) - \operatorname{tg} \alpha),$$

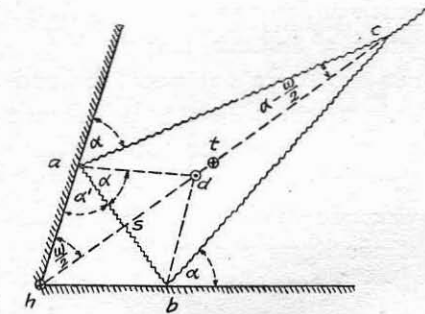


Fig. 21.

Tilfældet, naar Firkant $abfe$ er indskrivelig (Pascal's Sætning), og i saa Fald maa de to Cirkler være sammenfaldende, altsaa $\alpha' = \beta'$ og $g = h$ (Fig. 20). I h virker $2 m' \cot \alpha' = 2 m' \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ nedad og i d $m (\cot \alpha + \cot \beta)$ opad. Resultanten heraf skal gaa gennem c , d. v. s. $2 m' \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot ch = m (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot cd$.
Da $2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = ab : hk$ og $\cot \alpha + \cot \beta = ab : id$ og $hk : id = hs : ds$, faas

eller

$$3(m + m') \operatorname{tg}(\alpha - \frac{1}{2}\omega) = m \cot \alpha - m' \operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega,$$

der giver

$$\cot \alpha = \left[\sqrt{\left(1 + \frac{m'}{m}\right) \left(4 + \frac{m'}{m} + 3 \cot^2 \frac{\omega}{2}\right)} - 2 - \frac{m'}{m} \right] \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}. \quad (5)$$

Af Projektionsligningen $\frac{1}{2}p \cdot ab \cdot cs + 2 m' \operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega = 2 m \cot \alpha$ faas med denne Værdi af $\cot \alpha$

$$hs = \sqrt{\frac{2m}{3p}} \left[\sqrt{4 + \frac{m'}{m} + 3 \cot^2 \frac{\omega}{2}} - 2 \sqrt{1 + \frac{m'}{m}} \right]. \quad (5)$$

Endelig giver Moment om ab straks

$$cs = \sqrt{\frac{6(m + m')}{p}}. \quad (5)$$

Naar ab forsvinder i h , bliver $hs = 0$, hvilket giver

$$\frac{m'}{m} = \cot^2 \frac{\omega}{2}.$$

For $m' = 0$ faas den uforankrede Vipper, eller hvad der i denne Forbindelse er det samme, den forankrede Vipper uden øvre Armering i Hjørnet. I den forankrede Vipper med øvre Armering skal denne Armering naturligvis føres ud forbi den Brudlinie ab , der svarer til $m' = 0$, da denne Brudlinie ellers dannes, og Bæreevnen forringes. Formlerne bliver for $m' = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \cot \alpha &= \left[\sqrt{4 + 3 \cot^2 \frac{\omega}{2}} - 2 \right] \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, \\ hs &= \sqrt{\frac{2m}{3p}} \left[\sqrt{4 + 3 \cot^2 \frac{\omega}{2}} - 2 \right], \\ cs &= \sqrt{\frac{6m}{p}}. \end{aligned} \right\} (5a)$$

Ifølge Figurerne 16 og 17 kan Formlerne for den indspændte Vipper udledes af Formlerne (5a) for den uforankrede Vipper ved heri at erstatte m med $m + m'$.

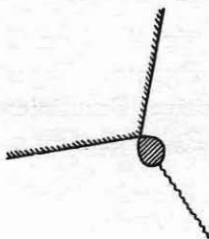


Fig. 22.

Da Vipperne i de fleste Tilfælde er meget nær symmetriske, kan (5) og (5a) anvendes som Tilnærmelsesformler. Man beregner da først m ved Brudfiguren svarende til Fig. 15 a, og ved Hjælp af denne foreløbige Værdi bestemmes da Vipperen. Af den nye Brudfigur kan man nu finde en korrigeret Værdi af m , f. Eks. ved Anvendelse af Arbejdslligningen.

I et indadgaaende Hjørne (Fig. 22) kan en Brudlinie kun ende, saafremt der virker en passende Kraft paa Pladen i Hjørnet. Findes denne Kraft ikke, eller kan der ikke komme en Reaktion fra Understøtningen, maa man antage, at et lille Parti af Pladen

nær Hjørnet ødelægges, hvorved Konturens Knæk ophæves. Randvinklen og dermed Knudekraften bliver ubestemt; men da Brudlinien gaar gennem Hjørnet, faas derved en ekstra Bestemmelse af Brudfiguren, der ophæver denne Ubestemthed.

Eksempler.

1. Simpelt understøttet Pladestrimmel med Enkeltkraft paa Midten.

Pladen er uensarmeret i Undersiden. Der dannes Brudlinierne aa' og bb' (Fig. 23), som deler Pladen i fire Dele. Kraften P fordeler sig paa disse med P_A paa A og P_B paa B . Knudekræfterne bliver ifølge (2a) med $v_R = 0$, $Q_R = m \cot \alpha$. Projektionsligningen for B giver $P_B = 2m \cot \alpha$, og Moment om ab' giver $P_B \cdot \frac{l}{2} \cot \alpha = \mu ml$ altsaa $\cot \alpha = \sqrt{\mu}$. Moment om ab for A giver $P_A \cdot \frac{l}{2} = ml \cot \alpha$,

d. v. s. $P_A = P_B = 2m \cot \alpha = 2m\sqrt{\mu}$, og da $P = 2P_A + 2P_B = 8m\sqrt{\mu}$, faas $m = P : 8\sqrt{\mu}$.

Dette svarer til en nyttig Pladebredde $2l\sqrt{\mu}$.¹⁾

2. Samme Pladestrimmel med Liniebelastning.

Brudfiguren i Fig. 24 giver for A ved Moment om ab $\frac{1}{2}ph^2 = 2mh \cot \alpha$. For B faas ved Moment om aa' $\frac{1}{2}p(l-2h)h \cot \alpha = \mu ml$, og ved Projektionsligningen $\frac{1}{2}p(l-2h) = 2m \cot \alpha$. Af disse Ligninger findes $h = \frac{1}{3}l$, $\cot \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}\mu}$, $m = pl : 6\sqrt{6\mu}$, svarende til Nyttebredden $1,84 l\sqrt{\mu}$.

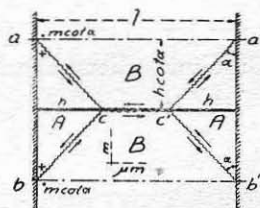


Fig. 24.

3. Tværsarmeret, indspændt Pladestrimmel med Enkeltkraft paa Kanten.

Brudfiguren bliver som vist paa Fig. 25. P fordeler sig til A og B med henholdsvis P_A og P_B . Knudekræfterne er anførte i Figuren. Tages Moment om bb' for A , faas intet Bidrag fra den positive Brudlinies Brudmoment. Man faar $P_A \cdot l = m \cdot 2l \cot \alpha$, altsaa $P_A = 2m \cot \alpha$.

¹⁾ Ved Anvendelse af Arbejdsligningen løses Opgaven paa følgende Maade: P sænkes Stykket δ . Derved drejer A sig $\delta : \frac{1}{2}l$, og B sig $\delta : \frac{1}{2}l \cot \alpha$. Brudmomenternes Resultant er ved A $ml \cot \alpha$, ved B μml , begge liggende i de tilsvarende Drejningsaksler ab og ab' . (4) lyder da:

$$P \cdot \delta = 2 \cdot \frac{2\delta}{l} ml \cot \alpha + 2 \cdot \frac{2\delta}{l} \mu ml \cot \alpha$$

der giver $m = P : 4 (\cot \alpha + \mu \cot \alpha)$, som bliver Maksimum $P : 8\sqrt{\mu}$ for $\cot \alpha = \sqrt{\mu}$.

Tages Moment om den fri Kant for B, faas tilsvarende $m \cot \alpha \cdot l = m \cdot l \cot \gamma$, idet Brudmomentet i den positive Brudlinie intet Bidrag giver. Tages Moment om bc (for B), giver det negative Brudmoment intet Bidrag, og man faar

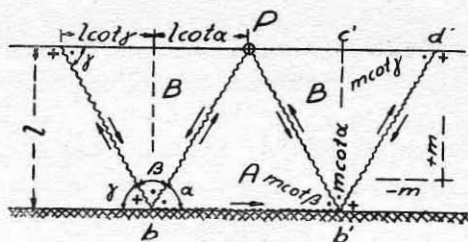


Fig. 25.

$$P_B \cdot l \cot \alpha + m \cot \gamma \cdot l \cot \gamma = ml.$$

Projektionsligningen for B giver $P_B = m \cot \alpha + m \cot \gamma$. Man faar heraf $\cot \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. $m = P : 2\sqrt{3}$, svarende til Nyttebredden 3,5 l.

4. Rektangulær Plade simpelt understøttet paa de tre Sider og fri langs den fjerde, med jævnt fordelt Belastning p og Liniebelastning \bar{p} paa den fri Rand.

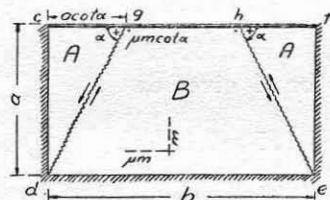


Fig. 26.

Brudfiguren i Fig. 26 giver ved Moment om cd for A

$$ma = \frac{p}{6} \cdot a \cdot a^2 \cot^2 \alpha + \frac{\bar{p}}{2} \cdot a^2 \cot^2 \alpha + \mu m \cot \alpha \cdot a \cot \alpha,$$

og ved Moment om de for B

$$2 \mu ma \cot \alpha + 2 \mu ma \cot \alpha = 2 \cdot \frac{1}{6} p \cdot a \cot \alpha \cdot a^2 + \frac{1}{2} p (b - 2a \cot \alpha) a^2 + \bar{p} (b - 2a \cot \alpha) a.$$

Af disse faas

$$m = \frac{pa^2}{6} \left(1 + 3 \frac{\bar{p}}{pa} \right) \frac{\cot^2 \alpha}{1 - \mu \cot^2 \alpha} = \frac{pa^2}{6\mu} \left[\frac{3}{4} \frac{b}{a} \left(1 + 2 \frac{\bar{p}}{pa} \right) \operatorname{tg} \alpha - 1 - 3 \frac{\bar{p}}{pa} \right],$$

der giver

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\mu + K^2} + K,$$

$$m = \frac{pab + 2\bar{p}b}{8(\sqrt{\mu + K^2} + K)},$$

hvor

$$K = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{pa + 3\bar{p}}{pa + 2\bar{p}}.$$

Formlerne gælder kun, naar $a \cot \alpha \leq \frac{b}{2}$. Er dette ikke Tilfældet, faas et Stykke Brudlinie fra Midten af den fri Kant parallelt med cd og fra dette Stykke Brudlinies Endepunkt Brudlinier til Hjørnerne d og e . Naar $\bar{p} = 0$, bliver Ligevægtslinierne i dette Tilfælde de samme som for den rektangulære Plade med Siderne $2a$ og b og simpel Understøtning paa alle fire Sider, saa Formlerne for dette Tilfælde kan benyttes.

5. Rektangulær Plade med jævnt fordelt Belastning, simpelt understøttet eller indspændt langs Siderne.

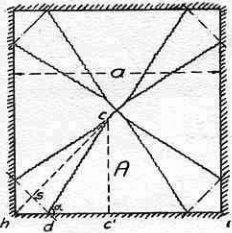


Fig. 27.

Man ser straks, at Ligningerne i disse Tilfælde bliver de samme som *Ingerslev's*¹⁾. Disse forudsætter imidlertid, at der i Hjørnerne er en øvre Armering lig den nedre Armering, hvad der ikke altid er Tilfældet i Praksis. Det kan derfor være nyttigt at undersøge den øvre Armerings Indflydelse paa Bæreevnen, f. Eks. for en simpelt understøttet kvadratisk Plade, (Fig. 27). Har denne en øvre Armering svarende til $m' = \frac{1}{2} m$, faas af (5) $\cot \alpha = 0,854$, og med $m = pa^2 : 24$ faas $hs = 0,048 a$, $hd = 0,068 a$, $cs = 0,612 a$, $ch = 0,660 a$ og $cc' = 0,466 a$. Moment om hi for A giver da

$$m(1 - 2 \cdot 0,068) a = \frac{1}{6} pa \cdot \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{1}{6} p \cdot 0,068 a \cdot 0,466^2 a^2,$$

der giver $m = pa^2 : 23,5$.

Med $m' = 0$ faas $\cot \alpha = 0,646$, $hs = 0,108 a$, $hd = 0,153 a$, $cs = 0,5 a$, $ch = 0,608 a$ og $cc' = 0,43 a$. Momentligningen for A giver da

$$m(1 - 2 \cdot 0,153) a = \frac{1}{6} pa \cdot \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{1}{6} p \cdot 0,153 a \cdot 0,43^2 a^2,$$

eller $m = pa^2 : 21,5$. Regnes om med denne Værdi, faas $m = pa^2 : 22$.

Af Værdien for hd ser man, at Jærnene passende kan bøjes op i Afstanden $a : 6$.

For denne indspændte Plade faas $m + m' = pa^2 : 22$.

6. Simpelt understøttet eller indspændt, ensarmeret Plade med Enkeltkraft.

Man konstruerer først Vipperne (Fig. 28) og finder dernæst ved Arbejds-ligningen, idet P sænkes δ ,

$$P \cdot \delta = \sum (m + m') s \cdot \frac{\delta}{h}.$$

Er Pladen simpelt understøttet, faas

$$P = m \sum \frac{s}{h} + (m + m') \sum \left(\frac{s}{h} \right)^2,$$

hvor den første Sum er Kantdelesnes Bidrag, den sidste Vippernes.

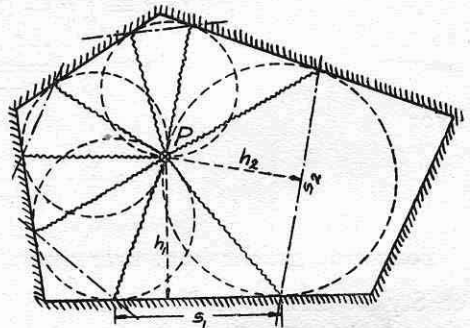


Fig. 28.

¹⁾ Ved en mindre Modifikation af Forudsætningerne kan *Ingerslev's* Formler simplificeres betydeligt som angivet af Ingeniør *K. F. W. Askøe* i »Ingeniøren« 1927, Side 405.

²⁾ Formlen er angivet af *Ingerslev* for Tilfælde uden Vipperne.

Er Pladen indspændt, faas

$$P = (m + m') \sum \frac{s}{h}$$

Med krumliniet Kontur (Fig. 29) faas for den simpelt understøttede Plade

$$P = m \int_a^b \frac{ds}{h} + m' \int_c^d \frac{ds}{h} + m \sum \frac{s}{h}.$$

Ved den indspændte Plade faas Faktoren $m + m'$.

I dette Tilfælde kan man uden at indføre nye Forudsætninger bestemme Reaktionen Fordeling paa de krumme Understøtninger, idet der fra et hvert Punkt af disse maa udgaa en Brudlinie til P . Den i Figuren viste lille Trekant bærer dP af P , og Projektionsligningen bliver da for en simpelt understøttet Plade

$$q \cdot ds = dP + Q_R - (Q_R + dQ_R) = dP - dQ_R.$$

Momentligningen om Tangenten giver

$$m \cdot ds = h \cdot dP.$$

Med $Q_R = m \cot \alpha$ faas derved

$$q = \frac{dP}{ds} - \frac{dQ_R}{ds} = \frac{m}{h} - \frac{dm \cot \alpha}{ds} = \left(\frac{1}{h} + \frac{d \alpha}{\sin^2 \alpha ds} \right).$$

Tangentens Vinkel med Polaraksen er τ og $\pi - \alpha = \tau - \theta$, altsaa

$$\div \frac{d \alpha}{ds} = \frac{d \tau}{ds} - \frac{d \theta}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{d \theta \cdot \sin \alpha}{r d \theta} = \frac{1}{\rho} - \frac{\sin^2 \alpha}{h},$$

hvor ρ er Krumningsradien, regnet positiv mod P . Indføres dette, faas

$$q = \frac{2m}{h} \div \frac{m}{\rho \sin^2 \alpha}.$$

For en indspændt Plade faas blot $m + m'$ i Stedet for m .

Ved disse Formler faas f. Eks. for en simpelt understøttet kvadratisk Plade med Enkeltkraft i Midten og øvre Armering i Hjørnerne svarende til

$$\begin{array}{l} m' : m = 0 \quad 0,5 \quad 1 \\ m = P : 6,6 \quad 7,7 \quad 8 \end{array}$$

En cirkulær Plade med Radius r og belastet med en Enkeltkraft i Afstanden a fra Centrum faar ved simpel Understøtning eller Indspænding

$$m \text{ eller } m + m' = \frac{P}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}.$$

7. Etageadskillelse med Trappehul.

Belastning : 600 kg/m², den viste Væg 200 kg/m og fra Trappen 400 kg/m paa Hullets korte Rand.

Ved praktiske Beregninger kan man kun undtagelsesvis løse Ligevægtsligningerne. Man skønner derfor en Brudfigur og bestemmer for hver

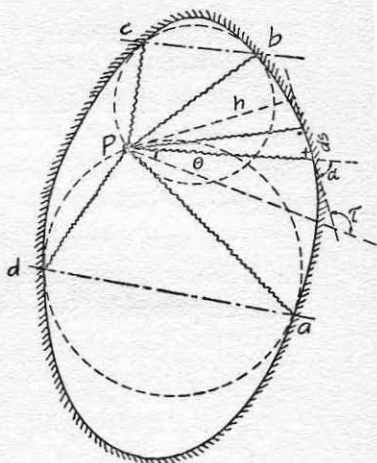


Fig. 29.

Pladedel Brudmomentet m . Afviger disse Værdier af m ikke altfor stærkt fra hinanden, er den skønnede Brudfigur ikke meget forskellig fra den, der gør m til Maksimum, naar m bestemmes ved Arbejds ligningen. Er det modsatte derimod Tilfældet, kan man af Afgivelserne let se, hvordan den skønnede Brudfigur skal ændres for at faa bedre Overensstemmelse mellem de enkelte Pladedeles Værdi for m . Naar en nogenlunde Overensstemmelse er opnaaet, bestemmes m ved Arbejds ligningen. Da jævnt fordelte Belastninger ikke er saa bekvemme at arbejde med, erstattes disse med et passende System af Enkeltkræfter.

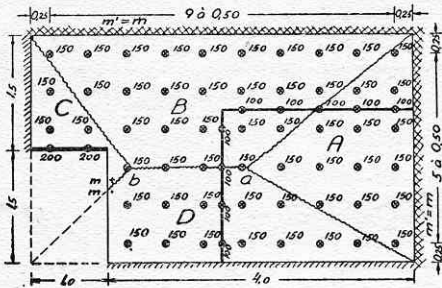


Fig. 30.

I det foreliggende Tilfælde deles Pladen i Kvadrater med Sidelinie 0,5 m og Liniebelastningen i Stykker paa 0,5 m. I disse Deles Tyngdepunkter virker de viste Kræfter (Fig. 30). Da »stærke« Dele af Pladen (f. Eks. Indspændinger og svagt belastede Dele) »frastøder« Brudlinierne, og »svage« Dele (f. Eks. Huller og stærkt belastede Dele) »tiltrækker« Brudlinierne,

faar Brudfiguren det viste Udseende. Kræfterne i Linien ab fordeles med Halvdelen til hver Side. Kraften i b regnes helt med til C. Momentligningerne om Kanterne bliver for

$$A: 3(m + m) = (6 \cdot 150 + 100) 0,25 + (4 \cdot 150 + 100) 0,75 + (3 \cdot 150 + 100) 1,25 + 150 \cdot 1,75; 6m = 1725; m = 288 \text{ kg.}$$

$$B: 5(m + m) = 9 \cdot 150 \cdot 0,25 + 7 \cdot 150 \cdot 0,75 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + (5 \cdot 150 + 100) 1,25 + (3 \cdot 75 + 50) 1,75; 10m = 2869; m = 287 \text{ kg.}$$

$$C: 3m = (2 \cdot 150 + 200) 0,25 + (150 + 200) 0,75 + 150 \cdot 1,25 + m \cdot 1,0; 2m = 575; m = 288 \text{ kg.}$$

$$D: 4m = (7 \cdot 150 + 100) 0,25 + (5 \cdot 150 + 100) 0,75 + (3 \cdot 75 + 50) 1,25 - m \cdot 1,0; 5m = 1269; m = 254 \text{ kg.}$$

Afgivelserne mellem de forskellige Værdier for m er tilfældigvis usædvanlig smaa, og man kunde uden videre benytte den største Værdi til Dimensionering af Pladen. For Fuldstændigheds Skyld vises dog Anvendelsen af Arbejds ligningen.

Sænkes ab Stykket 1, bliver $\theta_A = 1:2,2$; $\theta_B = 1:1,75$; $\theta_C = 1:1,3$ og $\theta_D = 1:1,25$. Multipliceres de opskrevne Momentligninger med de tilsvarende Drejninger, faas netop Bidragene til Arbejds ligningen. Det til den skønnede Brudfigur svarende m findes altsaa af

$$\frac{6m}{2,2} + \frac{10m}{1,75} + \frac{2m}{1,3} + \frac{5m}{1,25} = \frac{1725}{2,2} + \frac{2869}{1,75} + \frac{575}{1,3} + \frac{1269}{1,25},$$

som giver

$$m = 278 \text{ kg.}$$